

Examen HAVO 2012

tijdvak 2
woensdag 20 juni
13.30 - 16.30 uur

wiskunde A (pilot)

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 19 vragen.

Voor dit examen zijn maximaal 78 punten te behalen.

Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Benzineverbruik

John wil een nieuwe auto kopen. Hij vergelijkt bij een consumentenorganisatie verschillende auto's waar hij interesse in heeft en kiest een auto uit. De consumentenorganisatie heeft een ecotest uitgevoerd. In een ecotest worden onder andere het verbruik en de CO₂-uitstoot van een auto gemeten. Omdat de ecotest onder andere omstandigheden wordt uitgevoerd dan de test van de fabrikant, wijken de gevonden getallen meestal af.

Een deel van de gegevens van de test van de fabrikant en van de ecotest staat in de tabel.

tabel

testgegevens	test van de fabrikant	uitkomst van ecotest
verbruik (liter per 100 km)	4,3	5,0
CO ₂ -uitstoot (gram per km)	134	155

John is erg geïnteresseerd in het verbruik van de auto, want hij rijdt gemiddeld 25 000 kilometer per jaar.

- 3p **1** Hoeveel liter benzine moet John per jaar volgens de ecotest meer of minder tanken dan volgens de fabrikant?

In de tabel wordt gesproken over verbruik in liter per 100 kilometer. De fabrikant meet het verbruik volgens een standaardmethode, zodat je auto's met elkaar kunt vergelijken. Maar het benzineverbruik is van verschillende factoren afhankelijk. Een van die factoren is de buitentemperatuur. Zie de figuur op de volgende pagina. Deze figuur is ook op de uitwerkbijlage afgedrukt.

In de figuur is voor een aantal verschillende buitentemperaturen de **literafstand** L in km uitgezet tegen de snelheid v in km per uur. De literafstand is het aantal kilometer dat met 1 liter benzine gereden kan worden. Hoe groter de literafstand is, des te lager is het verbruik. In de figuur kun je bijvoorbeeld aflezen dat bij een temperatuur van 0 °C en een snelheid van 100 km per uur de literafstand L ongeveer 19,0 km is en bij 25 °C en dezelfde snelheid ongeveer 22,3 km.

Het verband tussen de snelheid v en de literafstand L is vanaf een snelheid van 120 km per uur bij benadering lineair. De drie formules die horen bij de verschillende buitentemperaturen hebben dus de vorm $L = a \cdot v + b$.

- 4p **2** Stel de formule op van de literafstand bij een buitentemperatuur van 0 °C bij snelheden vanaf 120 km per uur.

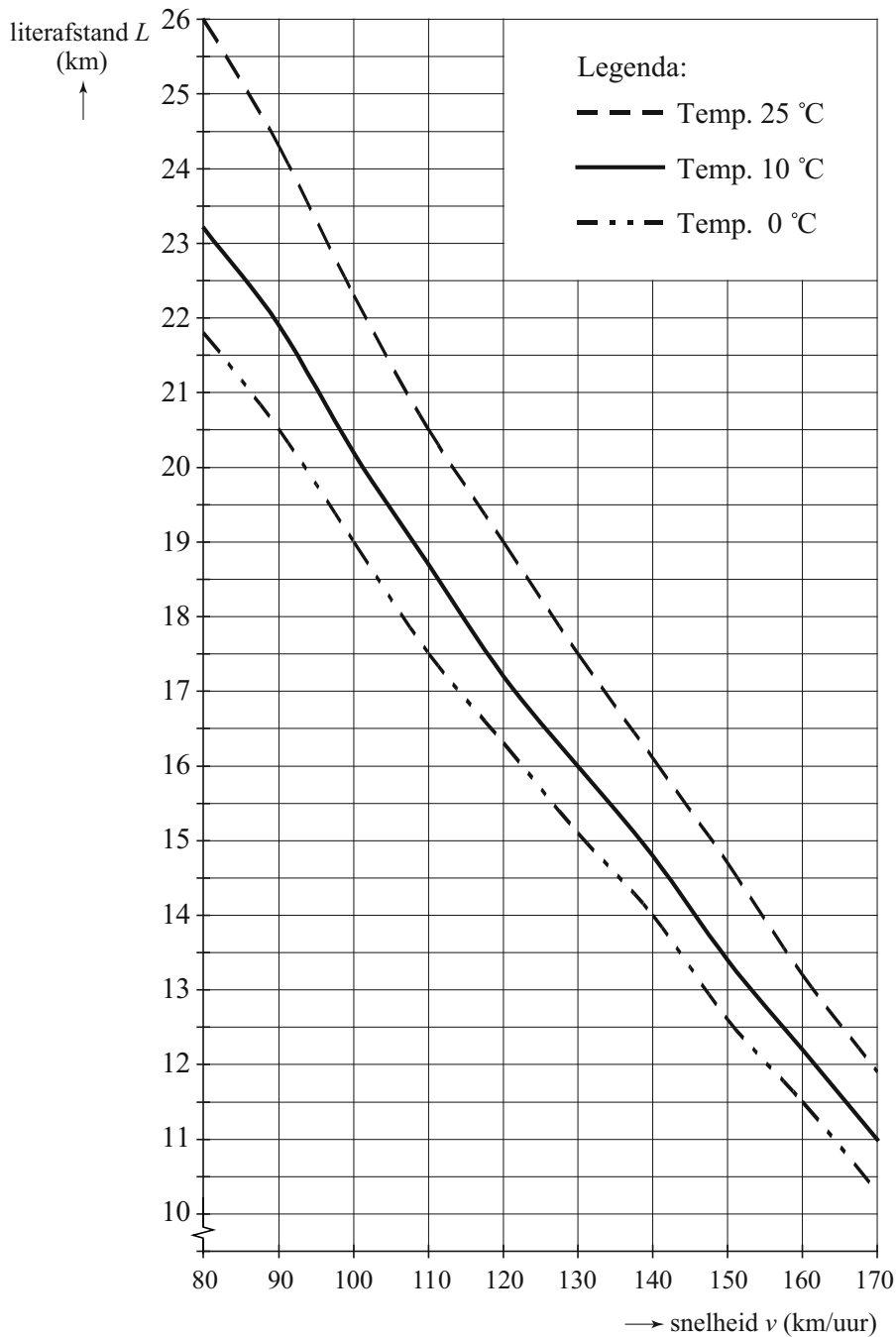
John maakt een rit van 75 km bij een buitentemperatuur van 10 °C. Hij rijdt met constante snelheid en verbruikt hierbij 4,4 liter benzine.

Hij wil onderzoeken hoeveel km hij meer kan rijden met dezelfde hoeveelheid benzine en met dezelfde constante snelheid als de buitentemperatuur 25 °C is. Hierbij gebruikt hij de figuur.

- 5p **3** Bereken hoeveel km John dan meer kan afleggen. Je kunt hierbij gebruikmaken van de figuur op de uitwerkbijlage.

figuur

Verband tussen literafstand en snelheid
bij verschillende buitentemperaturen



In de figuur kun je zien dat bij een snelheid van 90 km per uur en een temperatuur van 10 °C de literafstand 21,9 km is, en dat deze bij 25 °C 24,3 km is. Met behulp van lineair interpoleren kun je nu de literafstand berekenen bij deze snelheid en een temperatuur van 13 °C.

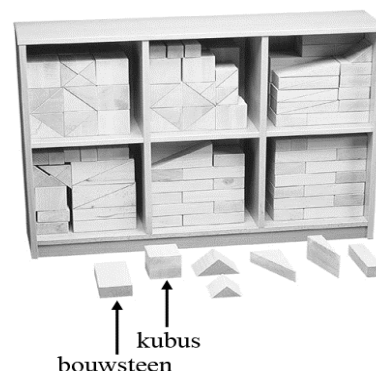
3p 4 Bereken deze literafstand L .

Haagse blokkenset

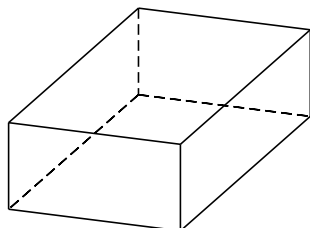
Bij diverse speelgoedwinkels kun je een Haagse blokkenset kopen. Deze blokkenset bestaat uit verschillende soorten blokken. We kijken in deze opgave naar twee soorten blokken (zie foto):

- **bouwstenen**: balkvormige blokken met ongelijke afmetingen (zie figuur 1);
- **kubussen**: blokken met gelijke afmetingen.

foto



figuur 1



Men gaat de blokken verven, te beginnen met de bouwstenen. Een bouwsteen wordt zo neergelegd dat de grootste vlakken het onder- en bovenzijde zijn en de kleinste vlakken het voor- en achtervlak zijn.

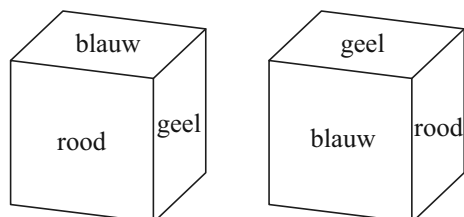
Voor elke bouwsteen worden drie verschillende kleuren gebruikt: één kleur om het boven- en ondervlak te verven, één kleur voor het voor- en achtervlak en één kleur voor het linker- en het rechterzijvlak.

Als de kleuren rood, blauw, geel, oranje en zwart beschikbaar zijn, kan een bouwsteen op verschillende manieren worden geverfd.

- 3p **5** Bereken op hoeveel verschillende manieren een bouwsteen met deze kleuren kan worden geverfd.

Daarna worden de kubussen geverfd. Ook in dit geval geeft men de tegenover elkaar liggende grensvlakken dezelfde kleur. Dan zijn er niet zo veel echt verschillende kubussen te maken. Zie bijvoorbeeld figuur 2: de tweede kubus kan zo gedraaid worden, dat hij gelijk is aan de eerste kubus. We noemen twee kubussen verschillend als ze niet zo gedraaid kunnen worden dat ze gelijk zijn.

figuur 2



Als tegenover elkaar liggende grensvlakken dezelfde kleur krijgen en de drie kleuren gekozen zijn, is er slechts één mogelijkheid om de kubus te verven. Voor de kubussen zijn de kleuren rood, blauw, geel, oranje, zwart en wit beschikbaar.

- 3p **6** Bereken hoeveel verschillende kubussen op deze manier in totaal gemaakt kunnen worden.

Men had er ook voor kunnen kiezen om alle zes grensvlakken van de kubus een verschillende kleur te geven. Er zijn immers zes kleuren beschikbaar. Om te tellen hoeveel echt verschillende kubussen met zes kleuren gemaakt kunnen worden, is er de volgende methode om de kubus te verven.

Om te beginnen wordt het voorvlak rood geverfd. Vervolgens wordt er een vlak blauw geverfd. Hiervoor zijn twee mogelijkheden:

1 Het bovenvlak wordt blauw geverfd. Er zijn nu nog vier kleuren voor de overige vier vlakken.

of

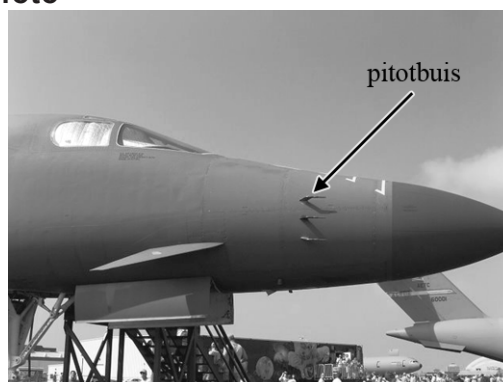
2 Het vlak dat niet aan het rode vlak grenst, het achtervlak, wordt blauw geverfd. Daarna wordt het bovenvlak geel geverfd en zijn er nog drie kleuren voor de overige drie vlakken.

4p **7** Bereken hoeveel verschillende kubussen er in totaal te maken zijn met zes kleuren.

Pitotbuis

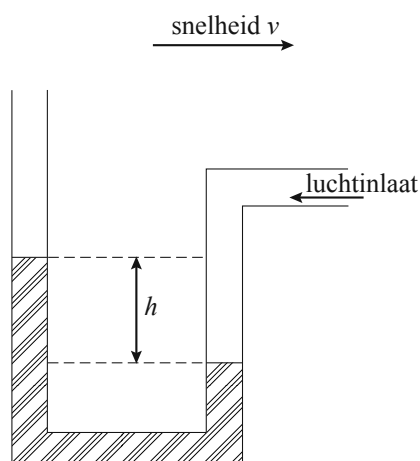
Voor de piloot van een vliegtuig is de 'air speed' heel belangrijk. Dit is de snelheid van het vliegtuig ten opzichte van de omringende lucht. Deze snelheid wordt gemeten met pitotbuizen: kleine buisvormige uitsteeksels aan de romp of vleugel van een vliegtuig. Zie de foto.

foto



Een eenvoudige versie van een pitotbuis is een gebogen buis met een vloeistof erin, zie de figuur. De werking is als volgt. Het vliegtuig vliegt naar rechts, zodat aan de rechterkant lucht de buis instroomt en daar de vloeistof wegdrukt, zie de figuur. De vloeistof in de linkerbuis komt dan hoger te staan. De hoogte van de vloeistof in de linkerbuis ten opzichte van de rechterbuis kan worden gemeten. Een hogere snelheid geeft een grotere hoogte.

figuur



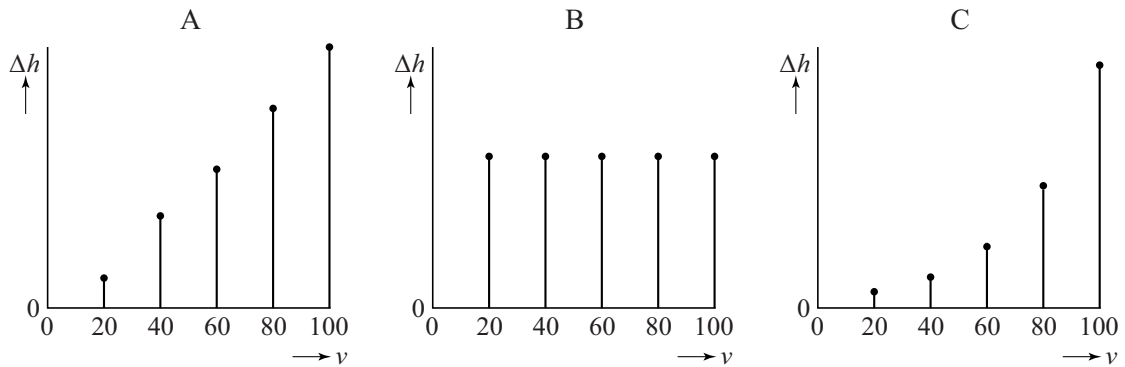
Je kunt met zo'n buis ook de snelheid van je auto bepalen op een windstille dag. Het enige wat je daarvoor nodig hebt, is een met water gevulde doorzichtige plastic buis die je tot een pitotbuis vormt. Het uiteinde voor de luchtinlaat wordt buiten de auto in de rijrichting geplaatst.

Een natuurkundedocent heeft op deze manier de hoogte h in cm gemeten bij verschillende snelheden v in km per uur. De resultaten staan in de tabel.

tabel

snelheid v (in km/uur)	0	20	40	60	80	100
hoogte h (in cm)	0	0,2	0,8	1,7	3,0	4,7

Bij de tabel kan een toenamediagram getekend worden. Hieronder staan drie toenamediagrammen waarvan er slechts één juist is.



We gaan ervan uit dat het toenamediagram zich op dezelfde manier voortzet voor snelheden groter dan 100 km per uur.

- 5p **8** Onderzoek welk toenamediagram het juiste is en bereken de hoogte h bij een snelheid van 120 km per uur.

De natuurkundedocent weet dat er een kwadratisch verband tussen h en v bestaat. Dit verband is van de volgende vorm

$$h = a \cdot v^2$$

Hierin is h de hoogte in cm en v de snelheid van de auto in km per uur.

- 3p **9** Bereken met behulp van de tabel de waarde van a .

Het verband tussen h en v is natuurlijk al langer bekend. Volgens natuurkundige wetten geldt in dit geval

$$v^2 = 2116 \cdot h$$

In de rest van deze opgave gaan we uit van dit verband.

De natuurkundedocent heeft nog een andere auto, daarvan is de snelheidsmeter onbetrouwbaar. Hij maakt met deze auto een rit waarbij hij met zijn pitotbuis een hoogte meet van 7,2 cm. Met dit gegeven en het natuurkundige verband kan hij zijn werkelijke snelheid berekenen.

De (onbetrouwbare) snelheidsmeter geeft een snelheid van 110 km per uur aan.

- 4p **10** Bereken hoeveel procent de snelheid op zijn snelheidsmeter afwijkt van de snelheid volgens het natuurkundige verband.

Hieronder staan vijf verbanden (a t/m e) tussen h en v .

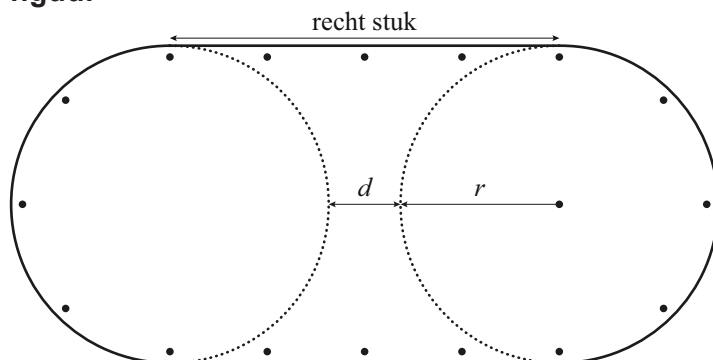
a $h = \frac{v^2}{2116}$	b $v = 2116 \cdot \sqrt{h}$	c $\frac{v^2}{h} = 2116$
d $h \cdot v^2 = 2116$	e $v = 46 \cdot \sqrt{h}$	

- 5p **11** Geef bij al deze verbanden aan of het verband $v^2 = 2116 \cdot h$ eruit kan worden afgeleid. Als dit mogelijk is, laat dan de afleiding zien.

Atletiekbaan

In een blad voor sporttrainers stond een artikel over een goede voorbereiding van hardlopers op indoorwedstrijden. Het ging er in het artikel vooral om hoe je het beste kunt wennen aan de scherpe bochten van zo'n indoorbaan. De schrijver gaf het advies om een atletiekbaantje op gras uit te zetten met behulp van kegels, zoals in de figuur is aangegeven. Op deze manier wordt een baan gemaakt die bestaat uit twee rechte stukken en twee bochten. De bochten zijn twee even grote halve cirkels.

figuur



De lengte L van zo'n atletiekbaan wordt bepaald door de straal r van de uitgezette cirkels en de afstand d tussen de cirkels met L , r en d in meter. De cirkels overlappen elkaar niet.

De totale lengte van de twee bochten samen noemen we het aantal meters bocht B .

In het artikel staan een paar tabellen. In tabel 1 is voor een afstand van precies 2 meter tussen de cirkels bij een bepaald aantal meters bocht B de bijbehorende baanlengte af te lezen.

tabel 1

Aantal meters bocht en baanlengte bij $d = 2$							
Aantal meters bocht B	75	100	125	150	175	200	...
Baanlengte L	126,7	167,7	208,6	249,5	290,4	331,3	400

Er is sprake van een **lineair** verband tussen het aantal meters bocht B en de baanlengte L .

- 3p **12** Bereken met behulp van lineair extrapoleren van de gegevens uit de tabel het aantal meters bocht bij een baanlengte van 400 meter.

In tabel 2 staat hoe groot de straal van de cirkel moet zijn om een bepaalde baanlengte te krijgen. Ook in deze tabel is de afstand tussen de beide cirkels precies 2 meter.

tabel 2

Baanlengte en straal bij $d = 2$							
Baanlengte L	150	175	200	225	250	300	400
Straal r	14,20	16,63	19,06	21,49	23,92	28,78	38,51

De verhouding tussen de totale lengte van de rechte stukken en de totale lengte van de bochten in de baan is erg belangrijk. Deze verhouding V is afhankelijk van de straal r van de cirkels en de afstand d tussen de cirkels. Er geldt:

$$V = \frac{2r + d}{3,14 \cdot r}$$

Bij een baanlengte van 225 meter en een afstand van precies 2 meter tussen de cirkels is deze verhouding ongeveer $\frac{2}{3}$.

3p **13** Laat dit met een berekening zien.

Niet alle atletiekbanen hebben een afstand d van precies 2 meter tussen de cirkels. Voor een atletiekbaan waarbij cirkels gebruikt worden met een straal van precies 10 meter is de verhouding V alleen nog afhankelijk van de afstand d tussen de twee cirkels.

De formule van V is dan te schrijven in de vorm $V = a \cdot d + b$.

4p **14** Bereken a en b .

Om de totale lengte van een atletiekbaan te berekenen moet de lengte van de twee rechte stukken opgeteld worden bij het aantal meters bocht. Het aantal meters bocht kan berekend worden met de formule:

$$B = 6,28 \cdot r$$

De meeste indooratletiekbanen hebben een totale lengte van 200 meter. In de Madison Square Garden in New York ligt een atletiekbaan met een andere lengte. Deze baan heeft een verhouding V van ongeveer 0,944 en de afstand d is ongeveer 11,55 meter.

6p **15** Bereken de totale lengte van de atletiekbaan in de Madison Square Garden.

Radioactieve stoffen

In ziekenhuizen wordt veel gebruikgemaakt van radioactieve stoffen. Bij het radioactieve verval van deze stoffen komt straling vrij. Deze straling wordt onder andere gebruikt voor diagnose en behandeling van ziekten. Patiënten krijgen een injectie met een geringe hoeveelheid radioactieve stof. Daarna kijkt de arts met een speciale camera waar de stof zich in het lichaam concentreert.

Om een scan van de botten te maken, wordt een patiënt ingespoten met de radioactieve stof Technetium-99m (Tc-99m). Tc-99m heeft een halveringstijd van 6 uur. Dat wil zeggen dat telkens na 6 uur de helft van de radioactieve stof verdwenen is. Deze halveringstijd is lang genoeg om het medische onderzoek uit te voeren en kort genoeg om de patiënt na het onderzoek niet in het ziekenhuis te hoeven houden.

- 4p **16** Bereken hoeveel procent van de radioactieve stof Tc-99m 24 uur na toediening nog in het lichaam van de patiënt aanwezig is.

Vanwege de korte halveringstijd is het voor een ziekenhuis onmogelijk om Tc-99m in voorraad te hebben. In het ziekenhuis wordt hiervoor eenmaal per week een **technetiumkoe** afgeleverd. Zie de foto. Deze 'koe' is eigenlijk een container met Molybdeen-99 (Mo-99). Tc-99m ontstaat bij het radioactieve verval van Mo-99, dat een veel langere halveringstijd heeft. Uit de koe kan een week lang op elk gewenst moment Tc-99m worden 'gemolken'. Dit is voldoende voor vele tientallen patiënten.

foto



Een container wordt gevuld met Mo-99. Het exponentiële radioactieve verval van Mo-99 is dusdanig dat na precies 7 dagen nog 17,3% van de stof over is. Op grond van dit gegeven kun je vaststellen dat de hoeveelheid Mo-99 iedere dag met ongeveer 22,2% afneemt.

- 4p **17** Laat met een berekening zien dat dit klopt.
- 5p **18** Bereken met behulp van de genoemde 22,2% na hoeveel uur de hoeveelheid Mo-99 in de container gehalveerd is.

Reclamefolders

Hij is er al een poosje en blijft ook nog wel even: de ongeadresseerde reclamefolder. Het onderzoek 'Thuis binnen Bereik', dat in 2009 gehouden is, geeft aan dat reclamefolders behoorlijk effectief zijn. Veel mensen die ze hebben bekeken, gaan tot actie over: men koopt een getoond product óf gaat een winkel bezoeken óf kijkt op een website. Volgens het onderzoek zorgen deze ongeadresseerde reclamefolders er voor dat 15% van de totale Nederlandse bevolking tot actie overgaat.



Het onderzoek is gebaseerd op een aantal gegevens en aannames.

Het Centraal Bureau voor de Statistiek meldt voor 2009:

- Er zijn 7,313 miljoen huishoudens, waarvan 2,618 miljoen eenpersoonshuishoudens;
- Een meerpersoonshuishouden telt gemiddeld 2,3 personen ouder dan 16 jaar;
- Nederland heeft 16,53 miljoen inwoners.

De volgende aannames zijn gedaan:

- $\frac{1}{6}$ deel van de huishoudens heeft een 'ja/nee-sticker' en ontvangt dus geen folders;
- In verhouding zijn er evenveel eenpersoons- als meerpersoonshuishoudens met een sticker;
- In huishoudens waar de folders wel ontvangen worden, bekijkt driekwart van alle personen ouder dan 16 jaar deze folders;
- 27% van de personen die de folders bekijken, gaat tot actie over;
- Alle eenpersoonshuishoudens worden gevoerd door een persoon ouder dan 16 jaar.

Het genoemde percentage van 15% dat tot actie overgaat, lijkt erg hoog. Op basis van bovenstaande gegevens en aannames kun je onderzoeken of dit percentage juist is.

7p **19** Onderzoek of dit percentage van 15% juist is.